

Leçon 157 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

[Aud] : *Géométrie*, Michèle Audin

[Bri-Pag] : *Théorie de l'intégration*, Marc Briane, Gilles Pagès

[Cia] : *Introduction à l'analyse numérique et à l'optimisation*, Phillipe Ciarlet

[Gri] : *Algèbre linéaire*, Joseph Grifone

[Man-Mne] : *Réduction des endomorphismes*, Roger Mansuy, Rached Mneimné

[Rom] : *Mathématiques pour l'agrégation*, Jean-Étienne Rombaldi

[Rom2] : *Analyse matricielle*, Jean-Étienne Rombaldi

[Sch] : *Analyse numérique : une approche mathématique*, Michelle Schatzman

[Szp] : *Mathématiques Algèbre L3*, Aviva Szpirglas

I Partie A - La base

I.1 Premières définitions [Rom][Cia][Gri]

■ **Déf 1 (Matrices symétriques) :**

■ **Ex 2 (Matrice du Laplacien) :**

■ **Prop 3 (Dimension) :**

Rem 4 : Décomposition en symétrique + antisymétrique.

■ **Déf 5 (Matrice hermitienne) :**

Rem 6 : C'est un $\mathbb{R}$ -ev mais pas un $\mathbb{C}$ -ev.

■ **Ex 7 :** Voir [Gri].

I.2 Lien avec les formes quadratiques [Gri]

■ **Déf 8 (Forme bilinéaire symétrique) :**

■ **Prop 9 (Formes quadratiques et formes bilinéaires symétriques) :**

■ **Prop 10 (Matrices symétriques et formes bilinéaires symétriques) :**

■ **Ex 11 :** Voir [Gri].

I.3 Automorphismes auto-adjoints [Rom] [Man-Mne]

■ **Déf 12 (Endomorphismes autoadjoints) :**

Thm 13 (Matrices symétriques et endomorphismes autoadjoints) :

■ **Ex 14 :** Je sais pas.

II Partie B - Réduction et applications

II.1 Théorème spectral [Cia] [Rom] [Man-Mne] [Gri] [Szp]

■ **Prop 15 (Spectre) :**

■ **Ex 16 :** Spectre de la matrice du Laplacien.

Thm 17 (Théorème spectral) :

■ **Ex 18 :** Voir [Gri] (Exo 33) ou [Rom] (Exo 12)

App 19 : Voir [Gri] (Exo 36)

Thm 20 (Réduction simultanée) :

II.2 Panel divers de son utilisation [Aud] [Szp]

■ **Prop 21 (Racine carré) :**

Thm 22 (Ellipsoïde de John-Loewner) :

■ **Ex 23 (Carré ou triangle centré) :** [Annexe : Faire le dessin]

Rem 24 : Grands axes d'une ellipse.

Thm 25 (Classification affine / euclidienne des coniques) :

🐦 **Dév 26 (Courant-Fischer) :**

🐦 **Dév 27 (Weyl) :**

III Partie C - Matrices symétriques définies positives

III.1 Définitions et propriétés [Rom2][Cia]

■ **Déf 28 (Matrice symétrique positive, définie) :**

■ **Ex 29 (Matrice du Laplacien) :**

■ **Contre-Ex 30 :**

■ **Prop 31 (Spectre) :**

■ **Thm 32 (Critère de Sylvester) :**

III.2 Utilisation pour un nouveau produit scalaire [Sch] [Fil] [Ber]

■ **Prop 33 (Produit scalaire associé à une matrice définie positive) :**

Rem 34 : Plus facile à analyser, et ne change pas la topologie en dim finie.

■ **Ex 35 (Fonctionnelle quadratique) :**

■ **Prop 36 (Kantorovich) :**

■ **Thm 37 (Gradient à pas optimal) :**

III.3 Matrices de Gram [Rom]

■ **Déf 38 (Matrice de Gram) :**

■ **Ex 39 :** Matrice de Gram d'une base orthonormée.

■ **Prop 40 :** Les matrices hermitiennes positives sont les matrices de Gram.

■ **Prop 41 :** Le déterminant de Gram $G(x_1, \dots, x_n)$ est nul si et seulement si la famille est liée.

■ **Thm 42 (Distance à un sev et déterminants de Gram) :**

■ **App 43 (Inégalité de Hadamard) :**

IV Partie D - Analyse numérique

IV.1 Décompositions matricielles [Sch] [Rom2]

■ **Déf 44 (Sous-matrices principales) :**

■ **Ex 45 :** Voir [Rom].

■ **Thm 46 (Critère d'existence LU) :**

Rem 47 : Lien avec le pivot.

Rem 48 : Complexité.

■ **Ex 49 :**

■ **Thm 50 (Existence Cholesky) :**

■ **Ex 51 (Mise en pratique) :**

Rem 52 : Complexité.

IV.2 Méthodes itératives et analyse matricielle [Cia] [Sch]

■ **Prop 53 (Norme subordonnée d'un symétrique) :**

■ **Ex 54 :** Norme 2 de l'exemple [Gri] (Exo 33)

■ **Prop 55 (Conditionnement d'un symétrique) :**

■ **Ex 56 :** Conditionnement (mauvais) du Laplacien

■ **Déf 57 (Méthode itérative) :**

■ **Ex 58 :** Exemples usuels [Annexe : Dessin avec le découpage de la matrice].

■ **Thm 59 (Critère de convergence) :**

■ **Thm 60 (Convergence dans le cas hermitien) :**

V Partie D - Décomposition polaire [Rom] [Szp]

V.1 Le théorème

■ **Thm 61 (Décomposition Polaire) :**

■ **Ex 62 :**

V.2 Utilisation [Bri-Pag]

■ **Thm 63 (Composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$) :**

■ **Thm 64 :** $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$.

Thm 65 (Points extremaux de $O_n(\mathbb{R})$) :

Thm 66 (Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$) :

 Dév 67 (Interprétation géométrique du déterminant) :